Elimination des Berechnungsfehlers in hochaufgelösten Simulationen der polaren Meereisdynamik

Ein modifiziertes Newton-Verfahren zur Bestimmung der Lösung des visko-plastischen Meereismodells

Meereisimulationen
unterscheiden sich signifikant von Satellitenbeobachtungen. Es ist nicht geklärt, wie viel der Abweichung auf ein falsches Aufstellen des Modells und wie viel auf ein fehlerhaftes Berechnen der Lösung zurückzuführen ist. Zur Simulation der Meereisdynamik wird meist das visko-plastische Meereismodel von Hibler gelöst (Grafik 1). Die Wahl des Viskositätsmodells macht das Meereismodell stark nichtlinear. Auf feiner werdenden Gittern (10 km ~ 2 km) entstehen mehr und mehr Strukturen (z. B. Risse) im Eis. Die damit einhergehende steigende Variation der Viskositäten η und ζ (Grafik 2) macht das Meereismodel schwer zu lösen.

$$\overbrace{\rho_{\text{ice}}}^{\text{Eisdichte}} H \left(\partial_t \mathbf{v} + \overbrace{f_c e_r \times}^{\text{Corioliskraft}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{ocean}}) \right) - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \overbrace{\boldsymbol{\tau}_{\text{ocean}}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau}_{\text{atm}}}^{\text{Schubspannung von Ozean, Wind}} = 0,$$

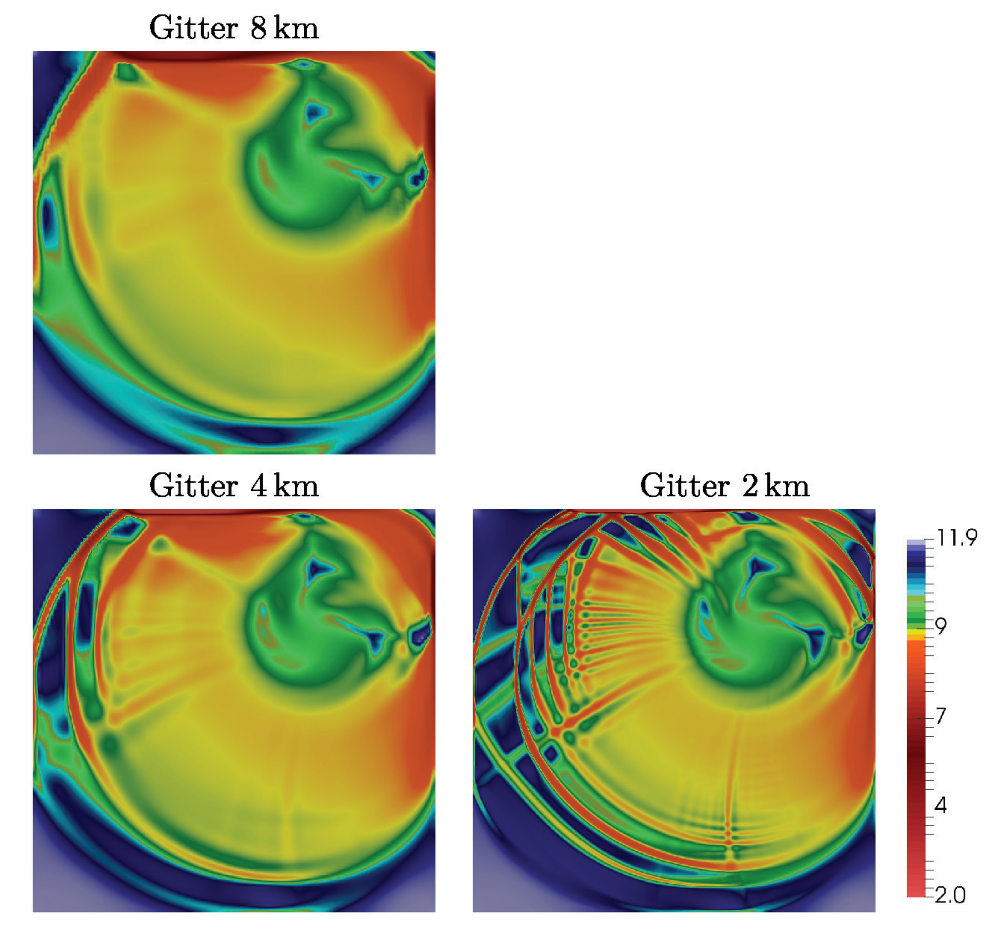
$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + (\zeta - \eta)\operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})I - \frac{P}{2}I, \quad \zeta(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, P) = \frac{P}{2\Delta(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})}, \quad \eta(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, P) = \frac{1}{4\Delta(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})},$$

$$\Delta(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \sqrt{\Delta_{min}^2 + (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{11} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{22})^2 + \frac{1}{4}\left[(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{11} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{22})^2 + 4\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{12}^2\right]}, \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T).$$

Grafik 1: Das visko-plastische Meereismodell. Sei v die Eisgeschwindigkeit, H die gemittelte Eisdicke, A die Eiskonzentration, P die Eisstärke, η und ζ die Viskositäten. (Quellen: Mehlmann, Richter; J. Comp. Phys, 2017)

Verfahren zur Lösung des visko-plastischen Meereismodells
sind zum einen sehr langsam wie die häufig verwendeten EVP- und Picard-Löser. Diese erzeugen in kurzer Zeit nur schlechte Näherungslösungen des Meereismodells. Der Fehler, der bei der Berechnung dieser Näherungslösung entsteht, kann sich im Verlaufe der Zeit summieren und zu anderen Simulationsergebnissen führen. Zum anderen finden schnellere Methoden, wie der JFNK-Löser (ein Newton-Verfahren), bei hohen Auflösungen nicht immer eine Näherungslösung des Meereismodells.

Das modifizierte Newton-Verfahren
kombiniert ein Newton-Verfahren, das, wenn es eine Lösung finden kann, das schnellste existierende Verfahren ist, mit dem Picard-Löser, der zwar langsam ist, aber immer eine Näherungslösung findet. Idee ist es, wenn keine Lösung mit dem Newton-Verfahren gefunden werden kann, die Jacobimatrix (positiv definit) des Newton-Verfahrens zu modifizieren, indem der Einfluss der Ableitungen der nichtlinearen Viskositäten (negativ semidefinit) reduziert wird. Eliminiert man diese Ableitungen ganz, erhält man den Picard-Löser. In einer einmonatigen Simulation der arktischen Meereisdynamik mit dem Mc.Gill-Meereismodell konnte durch das modifizierte Newton-Verfahren auf einem 10 km-Gitter mit einer Zeitschrittweite von 2 h die Anzahl der Zeitschritte, in der keine Lösung gefunden wurde, von 24 % auf 0.2 % reduziert werden.



Grafik 2: Viskosität η in logarithmischer Skalierung zur Basis 10. Mit steigender Auflösung entsteht mehr Struktur in der Lösung, der Wert der Viskosität variiert in Bezug auf den Ort schneller, was das Meereismodell schwer zu lösen macht. (Quellen: Mehlmann, Richter; Ocean Modeling, 2017)

Carolin Mehlmann

Carolin Mehlmann hat an der Universität in Heidelberg Scientific Computing studiert und promoviert seit Dezember 2015 zum Thema Effiziente Finite Elemente Simulation der Meereisdynamik. Bereits 2017 konnten mit Prof. T. Richter erste Ergebnisse zu neuen Lösungsmethoden in drei wissenschaftlichen Papieren veröffentlicht werden. In einem Forschungsaufenthalt im April 2018 am Meteorologischen Institut in Montreal hat Frau Mehlmann das neuen, modifizierte Newton-Verfahren in das Mc.Gill-Meereismoldell programmiert und erfolgreich an arktischen Simulationen getestet. Gerade arbeitet sie an einer Methode, die mithilfe von Fehlerschätzern Gitteradaptivität ermöglicht.